Title	独立確率変数列を用いて構成された確率微分方程式の近似解について(確率数値解析に於ける諸問題)
Author(s)	金川, 秀也
Citation	数理解析研究所講究録 (1993), 850: 50-58
Issue Date	1993-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/83693
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第850巻 1993年 50-58

独立確率変数列を用いて構成された確率微分方程式の近似解について

山梨大学教育学部　金川 秀也（Shuya KANAGAWA）

はじめに

伊藤型確率微分方程式（SDE）の解をコンピュータシミュレーションによって近似的に再現するには、Euler-Maruyamaの近似解やこれを改良したいくつかの近似解が用いられる（詳しくはKloeden-Platen (1992)を参照）．一般に近似解は一様疑似乱数からつくられる正規分布に従う確率変数列「正規疑似乱数」によって構成されるが、疑似乱数を用いる限り、これらの変数が完全な独立性と完全な正規分布を持つことは不可能である．本報告では、特に正規性が少し崩れた場合に、最も基本的な近似解であるEuler-Maruyamaの近似解と真の解との誤差を考察する．SDEは簡単のために1次元の場合を考えるが、多次元の場合もほぼ同様である．

1．Euler-Maruyamaの近似解

伊藤型SDEを考える．

$$
(1.1) \qquad \begin{cases} dX(t)=\sigma(t,X(t))dB(t)+b(t,X(t))dt, & 0\le t\le 1 \\ X(0)=X_0 \end{cases}
$$

ここで、$\{B(t), 0\le t\le 1\}$ は標準ブラウン運動、$\sigma(t,x)$ と $b(t,x)$ は可測関数とする．$\sigma(t,x)$ と $b(t,x)$ がLipschitz条件とliner growthの条件を満たすときSDE (1.1)は唯一の真の解 $\{X(t), 0\le t\le 1\}$ を持つが、その近似解として以下のように確率変数列 $\{y_k, k\ge 1\}$ を用いてEuler-Maruyamaの近似解と呼ばれる２つのタイプの $D[0,1]$ 上の確率過程 $\{Y_n(t), 0\le t\le 1\}$ と $\{Z_n(t), 0\le t\le 1\}$ が構成される．

$$y_k := X_0 + \sum_{j=1}^{k}\sigma\left(\frac{j-1}{n}, y_{j-1}\right)\eta_j + \sum_{j=1}^{k} b\left(\frac{j-1}{n}, y_{j-1}\right)\Big/ n, \quad k=0,1,\cdots,n,$$

とおく．ここで、$\{\eta_k\}$ は i.i.d.確率変数列で、

$$\eta_k := B\left(\frac{k}{n}\right) - B\left(\frac{k-1}{n}\right), \quad k=1,\cdots,n.$$

(1.2)
$$\begin{cases} Y_n(t) := y_k, & k/n \le t < (k+1)/n, \quad k=0.\cdots,n-1 \\ Y_n(1) := y_n, & \end{cases}$$

(1.3)
$$Z_n(t) := X_0 + \int_0^t \sigma_n(u)dB(u) + \int_0^t b_n(u)du, \quad 0\le t\le 1.$$

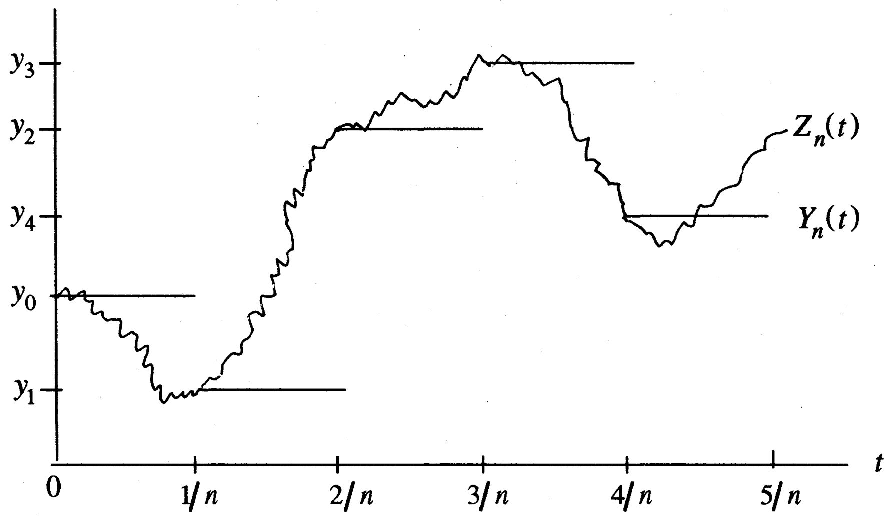
ただし、

$$\sigma_n(t) := \sigma_n\left(\frac{k-1}{n}, y_{k-1}\right) \quad k/n \le t \le (k+1)/n, \quad k=0,\cdots,n-1,$$

$$b_n(t) := b_n\left(\frac{k-1}{n}, y_{k-1}\right) \quad k/n \le t \le (k+1)/n, \quad k=0,\cdots,n-1.$$

$Z_n(t)$ はMaruyama (1955)においてSDEの解の存在とその一意性を示すために導入されたもので、確率積分で表現されているため直接

コンピュータシミュレーションに用いることはできない．一方 $Y_n(t)$ は各区間 $[(k-1)/n, k/n]$ で定値にしてシミュレーションに使えるようにしたもので、 $Y_n(t)$ と $Z_n(t)$ は $t=k/n, k=0,\cdots,n$ で一致する．



（図 1 ）

$Y_n(t)$，$Z_n(t)$ 共に平均収束の意味で $X(t)$ に収束し、その収束の速さも良く知られている（Gihman-Skorohod (1979), Shimizu (1984), Kanagawa (1988)).

定理 1. $\sigma(t,x)$，$b(t,x)$ に対して

$$|\sigma(t,x)-\sigma(s,y)|^2+|b(t,x)-b(s,y)|^2 \le K_1\left(|x-y|^2+|t-s|^2\right) \tag{1.4}$$

$$|\sigma(t,x)|^2+|b(s,y)|^2 \le K_2 \tag{1.5}$$

を仮定する．ただし、K_1, K_2 はある正の定数．このとき、任意の $p \ge 2$ に対して

$$(1.6)\quad \boldsymbol{E}\left(\max_{0\le t\le 1}\left|X(t)-Y_n(t)\right|^p\right)=o\left(n^{-p/2}(\log n)^{\varepsilon}\right)\quad as\ n\to\infty$$

$$for\ some\ \varepsilon>p/2,$$

$$(1.7)\quad \boldsymbol{E}\left(\max_{0\le t\le 1}\left|X(t)-Z_n(t)\right|^p\right)=O\left(n^{-p/2}\right)\quad as\ n\to\infty.$$

次に近似解が正規分布に従わない確率変数列$\{\xi_k\}$によって構成される場合を考える. Kanagawa (1989) は$\{\xi_k\}$が i.i.d.で、単に 2+δ 次モーメントを持つ場合に収束の速さを調べた.

<u>定理 2.</u> $\{\xi_k,\ k\ge 1\}$は i.i.d.で

$$\boldsymbol{E}(\xi_1)=0,\ \boldsymbol{E}\left(\xi_1^2\right)=1,\ \boldsymbol{E}\left(\xi_1^{2+\delta}\right)<\infty\ for\ some\ \delta>0.$$

また確率変数列$\{x_k,\ k\ge 1\}$を

$$x_k:=X_0+\sum_{j=1}^{k}\sigma\left(\frac{j-1}{n},x_{j-1}\right)\xi_j\Big/\sqrt{n}+\sum_{j=1}^{k}b\left(\frac{j-1}{n},x_{j-1}\right)\Big/n,\quad k=0,1,\cdots,n,$$

とおき、$\{x_k\}$より近似解$\{X_n(t),\ 0\le t\le 1\}$を次のように定義する.

$$\begin{cases} X_n(t):=x_k, & k/n\le t<(k+1)/n,\quad k=0.\cdots,n-1\\ X_n(1):=x_n. \end{cases}$$

このとき、新たな確率空間上に$\{X_n(t),\ 0\le t\le 1\}$と$\{X(t),\ 0\le t\le 1\}$を以下が成立するように再構成できる. 任意の $p\ge 2$ に対して

(1.8) $$E\left(\max_{0\le t\le 1}\left|X(t)-X_n(t)\right|^p\right)=o\left(n^{-p\delta/2(2+\delta)}(\log n)^{\varepsilon}\right)\quad as\ n\to\infty$$

$$for\ any\ \varepsilon>(2+\delta)^2/2(3+\delta),$$

ただし、$0<\delta\le 1$とする．ここで n のオーダーはbest possibleである．

定理 2 では、ξ_1のモーメントの条件だけを仮定しているために、ξ_1の分布が正規分布に十分近くても収束の速さは改善されない．そこで、次に ξ_1の分布と正規分布の差を用いた評価を示す．$\Phi(\cdot)$を標準正規分布の分布関数、$F(\cdot)$をξ_1の分布関数とする．

<u>定理 3.</u> $\{\eta_k,\ k\ge 1\}$は i.i.d.で $E(\eta_1)=0,\ E(\eta_1^2)=1$とする．また、

$$\nu(F,\Phi):=\int_0^1\left|F^{-1}(x)-\Phi^{-1}(x)\right|dx,$$

ただし、$F^{-1}(x):=\inf\{s:F(s)>x\},\ \Phi^{-1}(x):=\inf\{s:\Phi(s)>x\}$とする．このとき、新たな確率空間上に$\{X_n(t),\ 0\le t\le 1\}$と$\{X(t),\ 0\le t\le 1\}$を次が成立するように再構成できる．十分大きな n 及び任意の $p\ge 2,\ \varepsilon>p/2$ に対して

(1.9) $$E\left(\max_{0\le t\le 1}\left|X(t)-X_n(t)\right|^p\right)=\max\left\{K_3\,\nu(F,\Phi)^{p/2},\ K_4 n^{-p/2}(\log n)^{\varepsilon}\right\},$$

ただし、K_3、K_4は正の定数．

2．定理 3 の証明

$k/n\le t<(k+1)/n,\ k=0,1,\cdots,n-1$ に対して、

$$(2.1)\qquad \boldsymbol{E}\left(\max_{0\le u\le t}\left|X(u)-X_n(u)\right|^p\right)^{1/p} \le \boldsymbol{E}\left(\max_{0\le u\le t}\left|X(u)-Y_n(u)\right|^p\right)^{1/p} + \boldsymbol{E}\left(\max_{0\le u\le t}\left|X_n(u)-Y_n(u)\right|^p\right)^{1/p},$$

ただし、$Y_n(t)$は(1.2)で定義された近似解．さて$X_n(t)$と$Y_n(t)$の定義から、$k/n\le t<(k+1)/n,\ k=0,1,\cdots,n-1$に対して、

$$(2.2)\qquad \boldsymbol{E}\left(\max_{0\le u\le t}\left|X_n(u)-Y_n(u)\right|^p\right) \le \boldsymbol{E}\left(\max_{1\le i\le k}\left|x_i-y_i\right|^p\right)$$

$$\le K_5\,\boldsymbol{E}\left(\max_{1\le i\le k}\left|\sum_{j=1}^{i}\sigma\left(\frac{j-1}{n},x_{j-1}\right)\frac{\xi_j}{\sqrt{n}}-\sum_{j=1}^{i}\sigma\left(\frac{j-1}{n},y_{j-1}\right)\eta_j\right|^p\right) + K_6\,\boldsymbol{E}\left(\max_{1\le i\le k}\left|\sum_{j=1}^{i}b\left(\frac{j-1}{n},x_{j-1}\right)\Big/n-\sum_{j=1}^{i}b\left(\frac{j-1}{n},y_{j-1}\right)\Big/n\right|^p\right)$$

$$\le K_7\,\boldsymbol{E}\left(\max_{1\le i\le k}\left|\sum_{j=1}^{i}\sigma\left(\frac{j-1}{n},x_{j-1}\right)\left(\frac{\xi_j}{\sqrt{n}}-\eta_j\right)\right|^p\right) + K_8\,\boldsymbol{E}\left(\max_{1\le i\le k}\left|\sum_{j=1}^{i}\left\{\sigma\left(\frac{j-1}{n},x_{j-1}\right)-\sigma\left(\frac{j-1}{n},y_{j-1}\right)\right\}\eta_j\right|^p\right) + K_6\,\boldsymbol{E}\left(\max_{1\le i\le k}\left|\sum_{j=1}^{i}b\left(\frac{j-1}{n},x_{j-1}\right)\Big/n-\sum_{j=1}^{i}b\left(\frac{j-1}{n},y_{j-1}\right)\Big/n\right|^p\right)$$

$$=: I_1+I_2+I_3,$$

とおく．ただし、$K_5\sim K_8$は$n,\ t$に無関係な正の定数せある．また以

後の K も同様とする.

$$P\left\{\Phi^{-1}\left(F\left(\xi_k\right)\right)< x\right\}=P\left\{F\left(\xi_k\right)<\Phi(x)\right\}=\Phi(x)$$

より、改めて η_k をいわゆるquantile transformationを用いて

$$\eta_k := \frac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(F\left(\xi_k\right)\right), \quad k=1,2,\cdots,n \tag{2.3}$$

とおくと、$\{\eta_k\}$ はi.i.d.で $N(0,1/n)$ に従う確率変数列で、もとの $\{\eta_k\}$ と同じ結合分布を持つ. さて

$$S_k := \sum_{j=1}^{k}\sigma\left(\frac{j-1}{n}, x_{j-1}\right)\left(\frac{\xi_j}{\sqrt{n}}-\eta_j\right)$$

とおくと、$\{S_k\}$ は $\mathcal{F}_k := \sigma\{\xi_1,\cdots,\xi_k\}$-adaptedマルチンゲールであるから、Doobの不等式及び(1.5)より

$$\begin{aligned} I_1 &= K_7\, E\left(\max_{1\le i\le k}\left|S_i\right|^p\right) \\ &\le K_9\left\{E\left(\sum_{j=1}^{k}E\left(\left|\sigma\left(\frac{j-1}{n}, x_{j-1}\right)\left(\frac{\xi_j}{\sqrt{n}}-\eta_j\right)\right|^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{j-1}\right)\right)\right\}^{p/2} \\ &\le K_{10}\left\{\sum_{j=1}^{k}E\left(\left|\frac{\xi_j}{\sqrt{n}}-\eta_j\right|^2\right)\right\}^{p/2}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

また、(2.3)より

$$(2.5)\qquad \boldsymbol{E}\left(\left|\frac{\xi_j}{\sqrt{n}}-\eta_j\right|^2\right)=\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty}\left|u-\Phi^{-1}(F(u))\right|^2 dF(u)$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1\left|F^{-1}(u)-\Phi^{-1}(u)\right|^2 du=\frac{1}{n}\nu(F,\Phi).$$

(2.4)と(2.5)より

$$(2.6)\qquad I_1\le K_{10}\,\nu(F,\Phi)^{p/2}.$$

また

$$(2.7)\qquad I_2\le K_{11}\int_0^t \boldsymbol{E}\left(\max_{0\le u\le s}\left|X_n(u)-Y_n(u)\right|^p\right)ds,$$

$$(2.8)\qquad I_3\le K_{12}\int_0^t \boldsymbol{E}\left(\max_{0\le u\le s}\left|X_n(u)-Y_n(u)\right|^p\right)ds.$$

(2.2)、(2.6) - (2.8)より任意の$0\le t\le 1$に対して

$$\boldsymbol{E}\left(\max_{0\le u\le t}\left|X_n(u)-Y_n(u)\right|^p\right)\le K_{10}\nu(F,\Phi)^{p/2}$$

$$+K_{13}\int_0^t \boldsymbol{E}\left(\max_{0\le u\le s}\left|X_n(u)-Y_n(u)\right|^p\right)ds.$$

ゆえに、Gronwallの補題によって

$$(2.9)\qquad \boldsymbol{E}\left(\max_{0\le u\le t}\left|X_n(u)-Y_n(u)\right|^p\right)\le K_{14}\nu(F,\Phi)^{p/2}.$$

また定理 1 の(1.6)及び(2.1)、(2.9)より定理 3 が証明される.

参考文献

Gihman, I. I. and Skorohod, A. V., *The Theory of Stochastic Processes III,* Springer-Verlag, Berlin, 1979.

Kanagawa, S. (1988), On the rate of convergence for Maruyama's approximate solutions of stochastic differential equations, Yokohama Math. J., **36**, 79-85.

Kanagawa, S. (1989), The rate of convergence for approximate solutions of stochastic differential equations, Tokyo J. Math., **12**, 33-48.

Kloeden, P. E. and Platen, E., *Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

Maruyama, G. (1955), Continous Markov processes and stochastic equations, Rend Circ. Mat. Palermo, **4**, 48-90.

Shimizu, A. (1984), Approximation solutions for stochastic diffrential equations, Proc. Symp. on Stochastic differential Equations for Population Genetics, 201-210 (in Japanese).